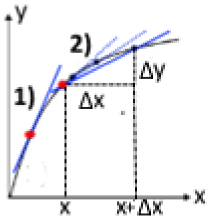
Как должен выглядеть школьный учебник на примере.

Спасский С.В.

Тема: Интеграл (11 класс).

Возврат к самой статье.

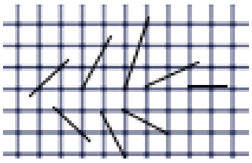
Освежим тему «Производная», близкую к теме «интеграл».



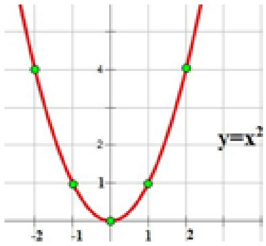
Обратите внимание на то, что есть 2 опредерения понятия «**производной**» функции **f(x): f'(x).**

Первое – «**образное, геометрическое**»: f'(x) - «наклон **касательной** к кривой f(x) при конкретном x. Или, что то же: как сильно изменяется **у** при изменении **х локально** (в области точки), т.е. **Δy/Δx, «наклон касательной».**

Второе определение **формальное и аналитическое**: на кривой берут «секущую» через 2 точки, точку на кривой с заданным значением x, и близкую к ней, на расстоянии Δx, т.е. с координатой x+Δx. Затем 2-ю точку приближают к исходной, уменьшая Δx (пишут Δx->0), положение«секущей» стремится к «касательной». Смотрят предельное значение Δy/Δx . Это предельное значение обозначают f'(x), (вместо f' можете встретить форму $\frac{dy}{dx}$, символ «Δ» заменяется на символ «d», символ предела Δx) .



По поводу визуального определения «наклона». Если точнее, «тангенса угла наклона касательной». Это на сколько изменяется значение **у** при изменении **х** на 1 (шаг вправо), или отношение Δy/Δx. Конечно, подразумевается одинаковый масштаб по осям x и y. Вот на рисунке отображены отрезки с разными наклонами, 1, 2, 3, 0.5, 0, -1, -2, -0.5.



Попробуйте визуально определить «наклон» для $f=x^2$, в точках x=1,2,0.5, 0, -1, -2,-0.5. Ниже вы сможете проверить свои оценки наклонов используя формулу.

Покажем **формальный аналитический способ** вычисления f'(x) на самом простом примере $f(x)=x^2$.

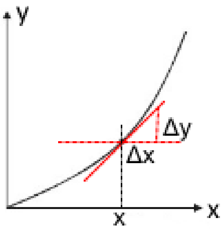
Возмем на кривой 2 точки, точку со значением x, и точку правее, x+Δx. Сосчитаем отношение Δy/Δx, используя $y=x^2$ и найдем предел отношения при Δx->0. $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2$. Считаем отношение и предел :
$\Delta y/\Delta x = ((x+\Delta x)^2-x^2)/\Delta x = ((x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)-x^2)/\Delta x = (2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)/\Delta x = 2x+\Delta x \to 2x$.

На графике $f(x)=x^2$ видно соответствие формуле f'(x)=2x, видно, что при x=0.5 f'=1, т.е. f'(0.5)=1; f'(1)=2; f'(0)=0; f'(-0.5)=-1; f'(-1)=-2;

Очевидны **линейные свойства** производной: $(3\cdot f(x))'=3\cdot f'(x)$, т.к. $\Delta(3y)/\Delta x= 3(\Delta y/\Delta x)$. $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$, т.к. $\Delta(f+g)/\Delta x= \Delta f/\Delta x+ \Delta g/\Delta x$.
И общий случай: $(C_1\cdot f(x)+C_2\cdot g(x))'=C_1\cdot f'(x)+C_2\cdot g'(x)$.

Вот формула «**производная произведения функций**», которая нам пригодится в теме «Интеграл»: $(f(x)\cdot g(x))'= f'\cdot g+f\cdot g'$.

Получается это так: $(f(x)\cdot g(x))' = [(f+\Delta f)\cdot(g+\Delta g))- f\cdot g]/\Delta x = (\Delta f\cdot g+f\cdot\Delta g+\Delta f\cdot\Delta g)/\Delta x$ $=(\Delta f/\Delta x)\cdot g+ f\cdot(\Delta g/\Delta x) + \Delta f\cdot(\Delta g/\Delta x) = f'\cdot g+f\cdot g' + \Delta f\cdot g'$. Последний член $\Delta f\cdot g' \to 0$ т.к. $\Delta f \to 0$.



Еще одно важное свойство, которое пригодится в теме «Интеграл»:

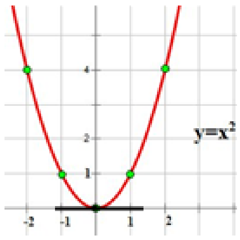
В **окрестности конкретной точки** кривой можно **приближенно заменить** кривую **касательной (апроксимация f(x) прямой)**, на ней $\Delta f=f'(x)\cdot \Delta x$. Используя это найдем производную «сложной функции». Сложная фунция -«матрешка»: z(y), а y(x). Надо найти как меняется z при изменении x, т.е. Δz/Δx при Δx->0.

Апроксимация прямой: $\Delta z=z'_y\cdot\Delta y$. Тогда предел $\Delta z/\Delta x=z'_y\cdot(\Delta y/\Delta x) = z'_y\cdot y'_x$.

1. $c' = 0, \ (c = \text{const})$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Вот упрощенная таблица производных.

Давайте проверим по ней вычисленную нами производную функции f=x², f'=2x. Это строка 2 таблицы при n=2. Получаем : (x²)'=2x.

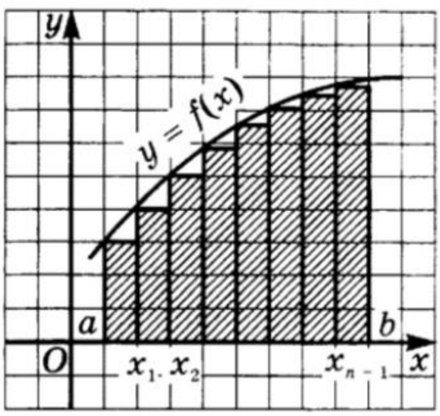


Освежим еще одно использование производной, для поиска минимумов и максимумов. Если функция («гладкая») имеет локальный **минимум** или **максимум,** то в этой точке касательная должна быть горизонтальна (f'(x)=0). Это хорошо видно на графике y=x² для x=0. Действительно, y'=2x. y'=0 при x=0. И действительно, у параболы при x=0 минимум. Но нужно помнить, что для минимума и максимума условие f'(x)=0 – это необходиое, но не достаточное условие.

Опрелеленный интеграла. Понятие.

В изучении темы «Интеграл» есть 3 близких понятий. **Исторически** тема начиналась с образно воспринимаемого понятия – «Определенного интеграла», - это **конкретная площадь** между кривой f(x) и осью x **на конкретном интервале x.**

Сейчас подход к теме изменили, сделав его более формальным, начиная с определения понятия «**первообразной от функции f(x)», обозначаемой F(x)**, то есть такой функции F(x), что F'(x)=f(x). Потом переходят к понятию «**неопределенный интеграл**», а затем уже переходят к «**определенному интегралу**». Такой формальный подход теряет в образности и вносит некооторую путаницу этих трех понятий. Мы начнем так, как это исторически сложилось, с «**определенного интеграла.**»



Допустим, нам надо **вычислить площадь** т.н. «**криволинейной трапеции**», т.е. площади между кривой f(x) и осью x, справа и слева ограниченную «вертикалями» x=a и x=b, из-за **параллельности** которых фигуру называют **трапецией.**

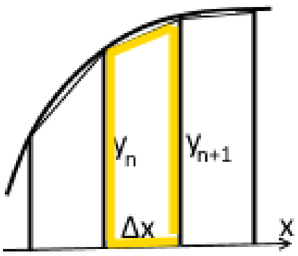
Площадь этой фигуры S вычисляют следующим образом. Разбивают отрезок **[a,b]** на **n** одинаковых частей: (x_0=a, x_1, … x_{n-1}, x_n=b), строят вертикальные «столбцы» с высотой до пересечения с кривой, скажем, их **левой** стороной, и считают площадь всех столбцов. Площадь каждого столбка (прямоугольника) считается произведением высоты f(x) по левому краю на Δx:

$$S_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_k)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x \ ;$$

Это выражение называется «частичной суммой». Отличается площадь S_n от искомой S на сумму площадей всех «треугольников» между «кривой» и «ступенчатой линией». При увеличении числа разбиений n S_n -> S, т.е. S= $\lim_{n\to\infty} Sn$. **Покажем это.**

Давайте увеличим **n** вдвое, при этом каждый столбец разобьется на 2 столбца. И при этом каждый прежний **треугольник разницы** уменьшится на прямоугольник, отмеченный красным. Его площадь составляет половину от прежнего треугольника. А значит общая ошибка у $\mathbf{S_{2n}}$ уменьшится вдвое по сравнению с $\mathbf{S_n}$. Значит, в нашем случае общая ошибка уменьшается обратно пропорционально n (~1/n). S_n -> S.

Для справки. Есть чуть менее простые, но более эффективные способы **приближенного** вычисления значений **определенных интегралов**, хотя **это вне нашей темы.** Например, в несколько ином способе «столбцы приближения» берут **не прямоугольными**, а **в виде трапеций.** Площадь каждой трапеции $\Delta x\cdot(y_n+y_{n+1})/2$.



Поэтому, когда складываем сумму всех трапеций, то все **$y_n/2$** (кроме двух крайних) суммируются дважды, т.к. встречаются в 2 соседних трапециях. А вся сумма практически сводится к **сумме y_n** (кроме крайних y_0 и y_n, которые идут с $^1/_2$), **умноженной на Δx**, как и в предыдущем случае. Но точность в этом методе намного выше (и сходимость к S быстрее). Скажем, чтобы обеспечить точность 0.01% в 1-м способе нужно n=10000, а в приводимом здесь 2-м - всего n=100.

Выше мы **развернуто** написали формулу для «частичной суммы» S_n.

С помощью знака суммы (сигма, «Σ») и индекса **i** ее можно записать так: $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x$

Это **сумма площадей столбиков** с номерами i от 0 до n-1, каждый высотой $f(x_i)$ и шириной Δx.

А вот как записывается **определенный интеграл.** Практически, то же самое. $S = \int_a^b f(x)dx$

Знак $\int$ (удлиненная «S») введен Лейбницем, этим отмечается, что речь идет о **сумме.** Номер i не нужен, достаточно указания x. Тут важно отметить, почему dx вместо Δx. Потому что это не частичная сумма Σ_n с конкретным n и конкретной шириной Δx столбцов. $\int$ - это предельное значение Σ_n. dx указывает на предельное значение Δx, уже не имеющее конкретной ширины.

(Вспомните, то же самое делается **в определении производной**: в $y' = {}^{dy}/_{dx}$ использование «d» вместо Δ указывает на предельное значение отношения ${}^{\Delta y}/_{\Delta x}$).

Историческая справка.


Исаак Ньютон


Готфрид Вильгельм Лейбниц

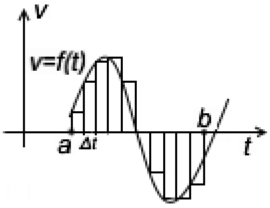
Исторически становление «предельных исчислений»: «дифференцииального и интегрального исчисления» - дело давнее и коллективное. Но, как правило, связывают его с Лейбницем и Ньютоном. Ньютон – английский физик, математик, философ. И хранитель Монетного двора, наладил качественное производство монет и очистил «монетное дело» от жульничества. Лейбниц - немецкий математик, физик, философ.


Пётр I

Результатом знакомства Петра I в Англии с работой Монетного двора (и, как предполагают, с самим Ньютоном) было хорошо организованое в России монетное дело и Монетный двор в Санкт-Петербурге. А результатом трех продолжительных встреч Петра I с Лейбницем было открытие многих учебных заведений в России и Академии наук в Сант-Перербурге. Лейбниц живо интересовался Россией, и был высокого мнения о русском царе.

Свойства определенного интеграла.

1)Что значит интегрирование отрицательной функции?



Мы определили, что «определенный иньтеграл» – это площадь между кривой функции f(x) и осью x, и между двумя вертикалями x=a и x=b, А что если при каких-то x функция f(x) имеет **отрицательные значения**? В этих местах и площади столбцов f(x)·Δx должны быть отрицательные. Поясним как это может быть.

Возьмем вместо координат x и y=f(x), координаты t (время) и скорость v=f(t). То есть, наша кривая – это график скорости, «снятый» со спидометра тепловоза. (тепловоз не может разворачиваться на рельсах, отрицательная скорость v – движение назад).

Площадь каждого прямоугольника Δs= v(t)·Δt при отрицательном v – отрицательна и обозначает **смещение Δs влево**.

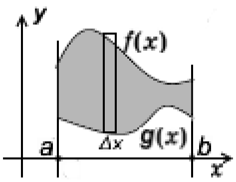
А вообще, в данном случае определенный интеграл S=$\int_a^b f(t)dt$ означает **не пройденный путь**, а **смещение от какой-то исходной точки M** за время от t=a до t=b, которое может быть как вправо (+), так и влево (-). В данном конкретном случае на графике прощадь «+» и площадь «-» примерно одинаковы. Значит, за время [a,b] тело отошло от исходной точки M вправо и потом вернулось к ней.

2)Линейность определенного интеграла.

Докажем **линейность** для суммы функций: т.е. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. Рассмотрим один столбец Δx в S_n. Его площадь (f(x)+g(x))Δx, ее можно разбить на 2 столбца с высотами: f(x)Δx и g(x)Δx. Если проделать это по всем столбцам, то сумму Σ(f(x)+g(x))Δx можно разделить на 2 суммы Σf(x)Δx и Σg(x)Δx. Уменьшая Δx, в пределе получаем то что нужно.

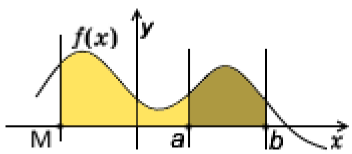
То же можно проделать и для разницы (f(x)-g(x)), и для (C·f(x)) и для общего случая $\int_a^b (C_1 \cdot f(x)+C_2 \cdot g(x))dx = C_1 \cdot \int_a^b f(x)dx + C_2 \cdot \int_a^b g(x)dx$.

3)Площадь между двумя кривыми.



Мы определили **определенный интеграл** как площадь между кривой f(x) и осью x (**с учетом знака f(x)**). А если нужно определить площадь между двумя кривыми f(x) и g(x)? Посмотрите на рисунок. Из него видно, что это площадь S=$\int_a^b (f(x)-g(x))dx$, поскольку каждый «Δx- прямоугольник» в S_n ограничен сверху и снизу f(x) и g(x), и имеет высоту (f(x)-g(x)).

4)Теорема Ньютона-Лейбница.

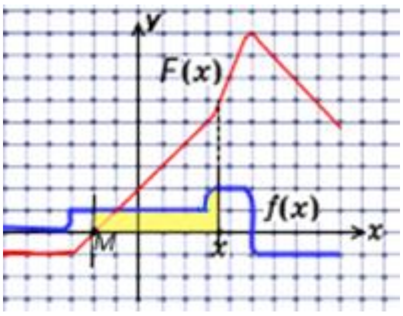


Как можно вычислить **определенный интеграл** в пределах [a,b], зная **определенные интегралы** в пределах [M,a] и [M,b] (M левее точек a, и b)? Из рисунка видно, что $\int_a^b f(x)dx = \int_M^b f dx - \int_M^a f(x)dx$. Это и есть **теорема Ньютона-Лейбница**. Она очевидна. Но далее пригодится нам.

Замечение: Вы должны понимать, что если поменять в определенном интеграле местами пределы a и b , то $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, т.е. меняется **знак** интеграла. Почему? Ранее у нас предполагалось, что a<b. Мы при интегрировании шли слева направо и интервалы Δx были у нас положительны. А если мы интегрируем от b к a, то идем справа налево, и шаги Δx у нас отрицательны. И все слагаемые f(x)·Δx меняют знак! Помните об этом. (То же вы получите и в выражении формулы теоремы Ньютона-Лейбница, поменяв местами a и b.)

Неопределенный интеграл и Первообразная функция F(x).

Почему **определенный интеграл** называеися «определенным»? Потому что точно определены обе его границы (a и b). А вот теперь для конкретной функции f(x) мы зададим правую границу не определенно «b», а как «x». А слева возьмем какую-то границу определенно, скажем M. Что мы получим? Мы получим некую функцию F(x), т.е. для каждого x получается свое значение площади (F(x)) отмечена красной линией).



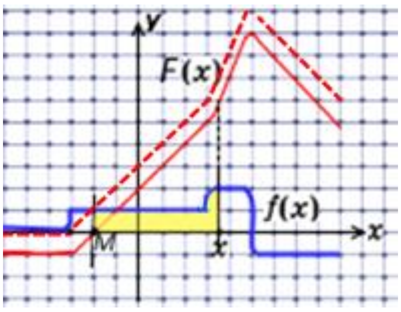
Проиллюстрируем на примере. Возьмем М= -2.

Мы намеренно взяли такой своеобразный вид функции f(x), чтобы ее интегрировать было просто. При x=M, (т.е. от М до М) S=0, т.е. F(-2)=0.
F(3)=S[M,3]=5.
F(5)=S[M,5]=5+4=9.
F(9)=S[M,9]=9-4=5. В промежутках между данными точками F(x) меняется линейно, поскольку f(x) на этих промежутках не меняется.

Теперь идем влево от М (x<M). Вспоминаем, что dx при этом становятся отрицательны. Поэтому F(-3)=-1.

Надеюсь, теперь понятно, что такое F(x)= $\int_M^x f(x)dx$.

Как мы можем использовать полученную нами F(x)? Допустим нас интересует **определенный интеграл** f(x) на интервале [2,4]. Из графика видно, что там 3 клеточки. По теореме Ньютона-Лейбница $\int_2^4 f(x)dx = \int_M^4 f(x)dx - \int_M^2 f(x)dx$.
Смотрим по графику, используя полученную F(z): это F(4)-F(2)=7-4=3.

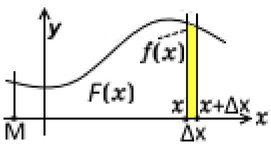


Изменим точку М, скажем, -2 сменим на -3.
Что изменится?

Кривая F(x), (но с М=-3) представлена на копии предыдущего рисунка, но пунктиром. Видно, что теперь F(-3)=0. И видно, что эта линия просто приподнята на 1 по отношению к прежнему графику. И понятно почему. Это прощадь S[-3.-2]=1! Считая уже с новой F(x) интеграл от 2 до 4, мы получим F(4)-F(2)=8-5=3, то же что и прежде, независимо от положения точки М. Добавка 1 к F(x) не имеют значения для разности двух значений F(x)! (По теореме Ньютона-Лейбница).

Вот почему **в таблицах неопределенных интегралов** прибавляют к формуле константу С, которая может принимать любое значение. Например $\int x \cdot dx = x^2/2 + C$. Обратите внимании, что при записи **неопределенных интегралов** знак «$\int$» пишут **без пределов**, в отличии от записи **определенного интеграла**.

Самое важное свойство функции F(x) : F'(x)=f(x).



Итак, **F(x)** – это **площадь под кривой f(x**) от М до текущего x. А какова **производная** от F(x)? Помним, производная от F(x) - это **отношение** изменения F(x) к изменению x (Δx), т.е. F'(x)=[F(x+Δx)-F(x)] /Δx, и в пределе Δx->0. Видно, что числитель – это разница площадей, точнее площадь от x до x+Δx. Это площадь столбца, окрашенного желтым, высотой f(x) и шириной Δx. Если разделить эту площадь на Δx, то получится значение, близкое к f(x), а в переделе точно равное f(x).

Итак, что F'(x)=f(x).

Мы ранее видели, что при изменении положения точки М F(x) изменяется на константу С. Это не меняет того, что мы только что доказали, поскольку (F(x)+C)'=f(x).

Переходим к понятию т.н. «первообразной»: это наша F(x).

Мы разобрали **свойства** интегралов, **определенного** и **неопределенного**, все они простые и прозрачные. Но мы пока не рассматривали, как **находить эти интегралы аналитически.** Некоторые из них можно находить, как это мы делали, суммируя площади столбцов, и затем находя пределы «частичный сумм» S_n при n->∞. Но это редко. Если при нахождении «производных от функций» можно всегда пользоваться некоторыми простыми правилам, то процесс «интегрирования» намного сложнее.

Основным методом нахождения интеграла является поиск функции F(x), производная которой F'(x)=f(x), т.е. это процесс, обратный дифференциированию.
И мы уже знаем, что введенная нами функция F(x)= $\int_M^x f(x)dx$ **обладает этим свойством.** Поэтому F(x) называют «**первообразной функции от f(x)**».

Переходим к современному формальному подходу в интегрировании

(где **исходным** понятием является «**первообразная**»).

Повторим точные формулровки.

«Первообразной функцией» от функции f(x) называется любая функция F(x), такая что F'(x)=f(x).

«Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ **» - это** запись «**общего решения уравнения F'(x)=f(x)», т.е.** запись «**всей совокупности первообразных F(x) от f(x)». Оно может быть записано как сумма любой подходящей F(x) с любой константой :** $\int f(x)dx$ **= F(x) +C.**

«Определенный интеграл S=$\int_a^b f(x)dx$ **» определяется через разность F(b) - F(a).**

Но теперь вы уже понимаете смысл всех этих формальных определений.

Докажем формально важное утверждение, что **любые две разные первообразные от f(x)** $F_1(x)$ и $F_2(x)$ могут различаться **только на константу**. Смотрим. Производная $(F_1(x)-F_2(x))'= F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$. А это значит, что $(F_1(x) - F_2(x))$ может быть только **константой**. А значит, F_1 и F_2 могут различаться только на **константу**.

Теперь займемся практическими приемами интегрирования.

Начнем с 3 таблиц.

Таблица производных.

$$c' = 0,\ c = \text{const}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

Таблица F(x).

$y = f(x)$	$y = F(x)$
0	C
1	x
$x^r,\ r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
$a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$

Таблица неопределенных интегралов.

$$\int dx = x + C$$
$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C\ (r \neq -1)$$
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
$$\int \sin x = -\cos x + C$$
$$\int \cos x = \sin x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}\ (a > 0,\ a \neq 1)$$

Заметьте, что функции двух таблиц (средняя и правая) различается только константой С. В практике используется только **таблица неопределенных интегралов.**

Недеюсь, помня о **линейных свойствах,** вы догадаетесь, как найти неопределенный интеграл (или F(x)) от такой функции: $C_1 \cdot f(x)+C_2 \cdot g(x)$, где f(x) и g(x) – функции из таблицы.

Степенные функции. Давайте посмотрим как получается $\int x^n dx=x^{n+1}/(n+1)+C$, даваемая в таблице. Начнем с примера. Помним, что $(x^2)'=2x$. Т.е. чтобы получить f(x)=x надо взять $F(x)=x^2/2$: $(x^2/2)'=2x/2=x$.

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$y = f(x)$	$y = F(x)$
$x^r,\ r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$

Аналогично для $f(x)=x^n$ из 1-й таблицы, меняя n на (n+1): $(x^{n+1})'=(n+1)\cdot x^n$. Значит, имея $f(x)=x^n$, надо взять $F(x)= x^{n+1}/(n+1)$. Посмотрим это соотношение и для дробных n, скажем n= -1/2, т.е. $f(x)=1/\sqrt{x}$. Поступаем формально. $F(x)= x^{n+1}/(n+1) =x^{+1/2}/(1/2)=2\cdot\sqrt{x}$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

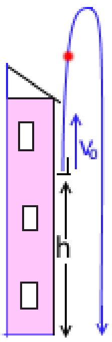
Внимание! Из 1-й таблицы: $\ln'(x)=1/x$. Таким образом для степенных функций **есть исключение** для n= -1: $\int dx/x= \ln(x)+C$, и это только для x>0. Иначе $\int dx/x= \ln(|x|)+C$.

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

$\int$**sin(x)dx,** $\int$**cos(x)dx.** С этими функциями всё очень просто. Надеюсь понятно, что $\int \sin(x)dx= -\cos(x) +C$.

Еще раз о смысле константы С в неопределенном интергале.

Вы уже знаете, что при любом значении С, если вам нужно сосчитать **определенный интеграл**, скажем, на интервале [a,b], то на величине интеграла значении «С» никак не скажется. **Но есть и другой смысл в С!**



Простая задача из физики. Стоя на балконе (на высоте h=15м) вы подбрасываете вертикально вверх мяч со скоростью v_0 =20м/сек, который долетев до определенной высоты, возвращается, и пролетая мимо вас падает на землю. Помня, что скорость уменьшается каждую секунду на g=10м/сек, имеем $v(t)=20\text{-}10\cdot t$.

Заранее ясно, что мяч будет лететь вверх **2 сек**, за это время v(t) уменьшится до 0, далее v(t) будет отрицательной, увеличиваясь по величине.

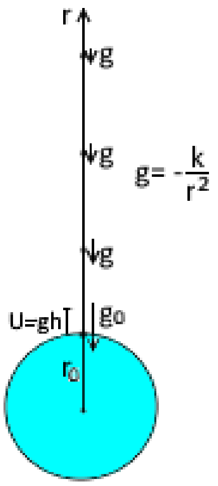
Неопределенный интеграл по таблице: $\int(20\cdot 1\text{-}10\cdot t)dt=20\cdot t\text{-}10\cdot(t^2/2)+C$.

Если нас сейчас интересует просто «**перемещение**», т.е. определенный интеграл, скажем, от t=0 до t=2 (верхней точки), то надо сосчитать $20\cdot t\text{-}10\cdot(t^2/2)+C$ для t=2 и t=0 и вычесть: (20+С) - (0+С)=20. Мяч «сместится» от балкона вверх на 20м. Смещение за 4 секунды получится 0. Можете проверить, сосчитав определенный интеграл от 0 до 4.

А теперь нас интересует **траектория**, т.е. зависимость высоты от времени z(t) при начальном условии z_0 =15. $z(t)= 20\cdot t\text{-}10\cdot(t^2/2)+C$. Ясно, что в данном простом случае С надо взять 15. Ответ получаем: $z(t)=15+20\cdot t+5\cdot t^2$. В физике очень много задач интегрирования **с заданными начальными условями.**

Задача по космической физике. «Несобственный интеграл».

Рассмотрим **гравитацирнную силу Земли.** И использование константы «С» в **потенциале.** На поверхности Земли сила тяжести равна **F=mg**, если точнее, **$F=-mg_0$**, учитывая направление силы, что это сила на поверхности Земли (**$r=R_0$**). **Напряряженность** гравитационного поля, т.е. сила **на единицу массы -** это $-g_0$. **Потенциал** этого поля (потенциальная энергия **на единицу массы**) $U=g_0h$, считая h от поверхности Земли.



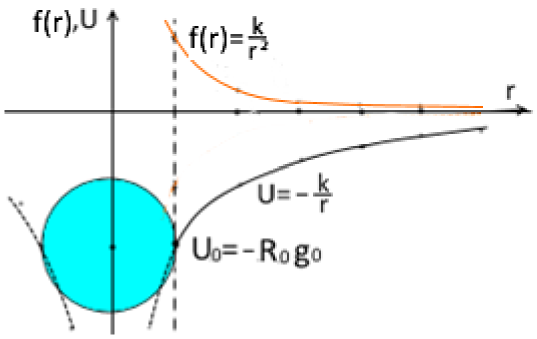
Но в космической физике надо учитывать то, что гравитационная сила зависит от расстояния r от центра Земли, обратно пропорционально r^2 ($\sim 1/r^2$). Используя закон Ньютона, можно записать так: $F(r) = -GM_З/r^2$, или через g_0: $F(r) = -g_0 \cdot (R_0^2/r^2)$. ($R_0$ – радиус Земли). А можно просто: $F(r) = -k/r^2$, где $k = g_0 \cdot r_0^2$.

Сила направлена к центру (против r), значит $U_{пот}$ возрастает с r: $\Delta U_{пот} = g \cdot \Delta r = (k/r^2) \cdot \Delta r$. Интегрируем как табличную степенную функцию при n= -2: ($\int x^{-2}dx = x^{-1}/(-1)+C = -1/x+C$).

Т.е. $U_{пот} = k \cdot \int \frac{dr}{r^2} = -k \cdot (\frac{1}{r}+C) = -\frac{k}{r} + C$. («С» остается произвольной).

Разность потенциалов двух точек r_1, r_2 – это определенный интеграл, разность значений выражения $-\frac{k}{r}+C$ между точками r_2 и r_1. Записывается стандартно так: $(-\frac{k}{r}+C)\Big|_{r1}^{r2}$. Получается $(-\frac{k}{r2}+\frac{k}{r1})$. («С» «уничтожается» при вычитании.)

Сейчас мы познакомимся еще с одним понятием, «**несобственным интегралом**». Оказывается, что наша функция под интегралом $f(r) = \frac{k}{r^2}$ может интегрироваться (т.е. считаться ее площадь между кривой и осью) **до r=∞** , как это ни кажется странным. Делается это так: в выражении для определенного интеграла $(-\frac{k}{r2}+\frac{k}{r1})$ берут $r_2 \to \infty$. Тогда $-\frac{k}{r2} \to 0$. Получаем результат: $\int_{r1}^{\infty} \frac{k}{r^2} dr = \frac{k}{r1}$. Поэтому физикам оказалось удобно в выражении $U_{пот} = -\frac{k}{r} + C$ константу С выбрать 0. Т.е. **нулевое значение потенциала $U_{пот}$** брать на бесконечности . При этом сама Земля находится «как бы» в «потенциальной яме» $U_{пот} = -\frac{k}{r}$.



Посмотрим, каково значние **потенциала на поверхности Земли.** Вернемся от k к g_0, ($k = g_0 \cdot R_0^2$). Получаем $U_{пот0} = -g_0 \cdot R_0$. Чтобы выбраться из этой «ямы» **кинетическая энергия** на поверхности Земли $mv^2/2$ должна превышать барьер $m \cdot g_0 \cdot R_0$. Т.е. $v^2 >= 2 \cdot g_0 \cdot R_0$, т.е. $v >= \sqrt{(2 \cdot g_0 \cdot R_0)}$. Это выражение – т.н. «2-я космическая скорость». (1-я космическая скорость $\sqrt{(g_0 \cdot R_0)}$ позвляет спутнику вращаться вокруг Земли.)

Второй прием при интегрировании.

$\int z'_y \cdot y'_x \cdot dx$ Кроме **поиска в «таблице стандартных интегралов»** нужной функции (1-й способ, самый простой) есть еще несколько приемов. Вот 2-й прием: умение в f(x) **распознать производную «сложной функции».** Напомним, сложная фуния – «матрешка»: z(y), y(x). Тогда $z'_x = z'_y \cdot y'_x$.

Например, производная от $f(x)=\sin(x^2)$: $f'(x)=\cos(x^2) \cdot (2x)$. Мы взяли $z=\sin(y)$, $y=x^2$. $z'_y = \cos(y)$, а $y'_x = 2x$. Вопрос, сумеетели ли вы заметить, что интегрируемая функция является (или ее можно привести к) производной «сложной функции»?

Скажем, дана для интегрирования такая же функция, но без «2», $f(x)= \cos(x^2) \cdot x$. Догадаетесь вы «доорганизовать» f(x), добавив в нее недостающую «2»? Т.е. записать f(x) в таком виде: $f(x) = {}^1/_2 \cdot [\cos(x^2) \cdot (2x)]$?

Попробуйте для практики найти похожий $\int {}^x/_{\sqrt{(1-x^2)}}$ dx. (Для $f(y) = {}^1/_{\sqrt{y}}$ $F(y) = 2\sqrt{y}$).

Очень часто функция y(x), которую мы предполагаем в «сложной функции» z(y) имеет вид: $y(x) = (k \cdot x+m)$. Например, $f(x)=\cos(3x+5)$. В этом конкретном случае $z=\cos(y)$, $y=3x+5$, $y'(x)=3$. Надо «добавить» множитель k . В конкретном примере это $y'=3$. То есть надо привести всё к виду: ${}^1/_3 \cdot \int \cos(3x+5) \cdot 3 \cdot dx = {}^1/_3 \cdot \sin(3x+5)+C$.

Этот вариант «линейной функции» $y(x)= (k \cdot x+m)$ очень часто встречается в практике, и он очень простой.

Прием третий в интегрировании. Взятие интеграла «по частям».

$\int f'\cdot g\, dx = f\cdot g - \int f\cdot g'\, dx$ **Еще один прием.** Вы его использовать не будите, но познакомиться с ним надо. Называется он «**интегрированием по частям**». Используется формула «производной **произведения функций**»: $(f(x)\cdot g(x))' = f(x)'\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x)'$, проще, $\mathbf{(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'}$.

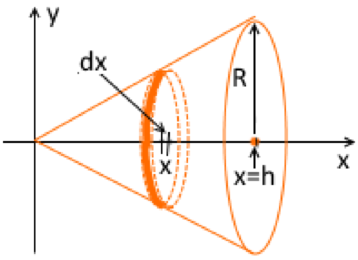
Перепишем формулу так: $\mathbf{f'\cdot g = (f\cdot g)' - f\cdot g'}$ и проинтегрируем все части: $\int f'\cdot g\cdot dx = \int (f\cdot g)'\cdot dx - \int f\cdot g'\cdot dx$. Видно, что 2-е слагаемое это просто $\mathbf{f\cdot g}$. Т.е, имеем $\int f'\cdot g\cdot dx = f\cdot g - \int f\cdot g'\cdot dx$.

Покажем на примере. Допустим, надо проинтегрировать функцию $\cos(x)\cdot x$. Видим, что если принять $f'(x)=\cos(x)$ (т.е. $f(x)=\sin(x)$), а $g(x)=x$, то $\cos(x)\cdot x$ это $f'(x)\cdot g(x)$. По формуле $\int f'\cdot g\cdot dx = f\cdot g - \int f\cdot g'\cdot dx$ получаем : $\int \cos(x)\cdot x\cdot dx = \sin(x)\cdot x - \int \sin(x)\cdot x'\cdot dx$

Последний член $\int \sin(x)\cdot x'\cdot dx = \int \sin(x)\cdot 1\cdot dx = -\cos(x)+C$. Подставляем с учетом знака.

Окончательный ответ: $\int \cos(x)\cdot x\cdot dx = \sin(x)\cdot x + \cos(x) + C$. Можете проверить.

Интегрирование объема тела вращения.



Рассмотрим пример. Нужно вычислить объем **конуса** (тела вращения), высото **h** и радиусом основания **R**. Расположим конус его осью по оси x, с вершиной в точке x=0.

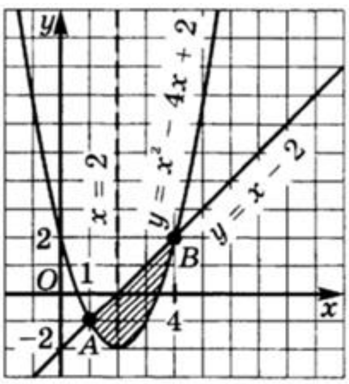
Функция r(x) линейная, при r(0)=0. r(h)=R: $r(x)=(x/h)\cdot R = x\cdot(R/h)$.

Мысленно порежим конус на диски толщиной dx и радиуса r(x). Площадь диска $\pi\cdot r(x)^2$. Значит, объем диска $\pi\cdot r(x)^2\cdot\Delta x$. Объем ищем интегрированием от 0 до h $\int \pi\cdot r(x)^2\cdot dx = \int \pi\cdot(x\cdot R/h)^2\cdot dx =$ $\pi R^2/h^2\cdot\int x^2 dx = \pi R^2/h^2\cdot(x^3/3)\ \Big|_0^h = \pi R^2/h^2\cdot[h^3/3-0] = \pi R^2 h/3$.

Ответ $V=\pi R^2 h/3$ совпадает с известной формулой объема конуса.

Попрактикуемся в нахождении определенного интеграла. Типичная задача.

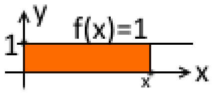
Задача. Вычислить площадь, ограниченную прямой $y=x-2$ и параболой $y=x^2-4x+2$.
Решение. Данная прямая – это прямая $y=x$, спущенная на 2, а параболу $y=x^2-4x+2$ можно записать в виде $(x-2)^2-2$, т.е. это парабола $y=x^2$, смещенная вправо и вниз на 2.

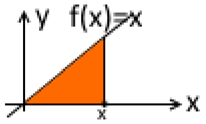


1)Надо найти точки пересечения A и B, т.е. точки, в которых x и y у прямой и параболы одинаковы. (Поскольку границ интегрирования не указано.) Т.е. решаем $x-2 = x^2-4x+2$, это квадратное уравнение: $x^2-5x+4=0$. Уравнение имеет 2 решения: $x_1=1$, $x_2=4$. Значит, интегрировать надо на интервале (1,4).

2)Надо сосчитать определенный интеграл на инервале (1,4), интегрировать надо разницу верхней функции $y=x-2$ и нижней, параболы: $((x-2)-(x^2-4x+2)) = (-x^2+5x-4)$.

$$\int_1^2(-x^2+5x-4)dx = -x^3/3+5\cdot x^2/2-4x+C\ \Big|_1^4 =$$
$$(-4^3/3+5\cdot 4^2/2-4\cdot 4) - (-1^3/3+5\cdot 1^2/2-4\cdot 1) = (-64/3+40-16)-(-1/3+5/2-4) = 4.5.$$





Мы закончили тему «Интеграл». Если по существу – то ничего сложного. Например, даже визуально из графика видно, что интеграл от f(x)=1 $\int_0^x 1\cdot dx$ **=x**, а интеграл от f(x)=x $\int_0^x x\cdot dx$ $=x^2/2$, поскольку это треугольник с основанием x и высотой x. **Хотя реально в общем случае процесс интегрирования не прост.**