

Формула века $E=mc^2$, которую мы не понимаем.

08.11.2011

Спасский Станислав.

stanislav@spassky.net

[На главную](#)

Итак, формула века $E=mc^2$. Опубликовано в статье Эйнштейна 1905 года. Эта статья вышла вскоре после статьи Эйнштейна, от которой принято отсчитывать начало СТО. Сама статья (воспроизводимая здесь) не самая простая для чтения, поэтому можете ограничиться короткими параллельными пояснениями. А можете оценить и сам первоисточник. Далее будет дан вывод формулы на практически той же схеме без привлечения СТО. И показано, что смысл и значение формулы несколько иной. Итак:

DOES THE INERTIA OF A BODY DEPEND UPON ITS ENERGY-CONTENT?

By A. Einstein
September 27, 1905

The results of the [previous investigation](#) lead to a very interesting conclusion, which is here to be deduced.

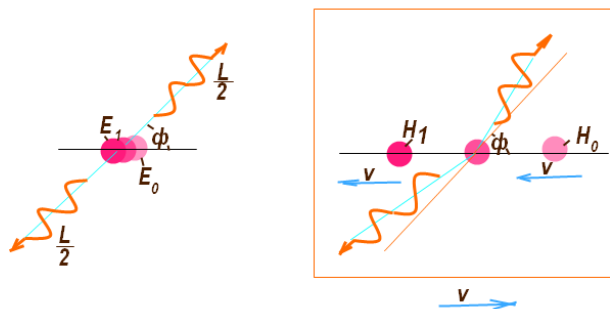
I based that investigation on the Maxwell-Hertz equations for empty space, together with the Maxwellian expression for the electromagnetic energy of space, and in addition the principle that:--

The laws by which the states of physical systems alter are independent of the alternative, to which of two systems of coordinates, in uniform motion of parallel translation relatively to each other, these alterations of state are referred (principle of relativity).

With these principles* as my basis I deduced *inter alia* the following result (§ 8):--

В статье сначала вспоминается принцип относительности.

Затем рассматривается одна и та же простая ситуация в двух системах отсчета. Сама ситуация сводится к телу с массой, которое, если смотреть в системе самого тела, излучает в противоположные стороны 2 одинаковых фотона. Угол линии разлета фотонов ϕ , в принципе, произвольный, а их суммарная энергия L . Само тело после излучения, понятно, остается на месте.



2я система, в которой рассматривается эта же ситуация, движется (на нашей картинке вправо) со скоростью v . В этой системе тело, как и положено, движется влево со скоростью v , потом испускает 2 фотона, и, согласно предыдущему рассмотрению в 1й системе, продолжает двигаться влево с прежней скоростью v .

В движущейся системе направления фотонов уже не выглядят противоположными. Каждый из 2 векторов направления получает приращение (и поворот) влево из-за движения системы вправо, как видно на рисунке.

Далее следуют формулы энергетического баланса в обеих системах.

В данном фрагменте статьи обратите внимание на формулу преобразования энергий каждого фотона согласно СТО при переходе в движущуюся систему, и дальше то же самое для суммы их энергий, которая увеличивается на лоренц-фактор.

With these principles* as my basis I deduced *inter alia* the following result (§ 8):--

Let a system of plane waves of light, referred to the system of co-ordinates (x, y, z) , possess the energy l ; let the direction of the ray (the wave-normal) make an angle ϕ with the axis of x of the system. If we introduce a new system of co-ordinates (ξ, η, ζ) moving in uniform parallel translation with respect to the system (x, y, z) , and having its origin of co-ordinates in motion along the axis of x with the velocity v , then this quantity of light--measured in the system (ξ, η, ζ) --possesses the energy

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \phi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

where c denotes the velocity of light. We shall make use of this result in what follows.

where c denotes the velocity of light. We shall make use of this result in what follows.

Let there be a stationary body in the system (x, y, z) , and let its energy--referred to the system (x, y, z) be E_0 . Let the energy of the body relative to the system (ξ, η, ζ) moving as above with the velocity v , be H_0 .

Let this body send out, in a direction making an angle ϕ with the axis of x , plane waves of light, of energy $\frac{1}{2}L$ measured relatively to (x, y, z) , and simultaneously an equal quantity of light in the opposite direction. Meanwhile the body remains at rest with respect to the system (x, y, z) . The principle of energy must apply to this process, and in fact (by the principle of relativity) with respect to both systems of co-ordinates. If we call the energy of the body after the emission of light E_1 or H_1 respectively, measured relatively to the system (x, y, z) or (ξ, η, ζ) respectively, then by employing the relation given above we obtain

employing the relation given above we obtain

$$\begin{aligned} E_0 &= E_1 + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L, \\ H_0 &= H_1 + \frac{1}{2}L \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \phi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{1}{2}L \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \phi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

By subtraction we obtain from these equations

Через E_0 и E_1 обозначаются энергии массивного тела в системе, связанной с ним (1й системе) до и после излучения. Через H_0 и H_1 те же энергии в движущейся системе. Суммарная энергия фотонов во 2й системе больше на лоренц-фактор $1/\sqrt{(1-v^2/c^2)}$ согласно СТО. Причем, независимо от направления излучения фотонов ϕ . Обратите внимание, что этот результат для пары противоположных фотонов эквивалентен изменению энергии в СТО для массивного тела.

By subtraction we obtain from these equations

$$H_0 - E_0 - (H_1 - E_1) = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}.$$

The two differences of the form $H - E$ occurring in this expression have simple physical significations. H and E are energy values of the same body referred to two systems of co-ordinates which are in motion relatively to each other, the body being at rest in one of the two systems (system (x, y, z)). Thus it is clear that the difference $H - E$ can differ from the kinetic energy K of the body, with respect to the other system (ξ, η, ζ) , only by an additive constant C , which depends on the choice of the arbitrary additive constants of the energies H and E . Thus we may place

depends on the choice of the arbitrary additive constants of the energies H and E . Thus we may place

$$\begin{aligned} H_0 - E_0 &= K_0 + C, \\ H_1 - E_1 &= K_1 + C, \end{aligned}$$

since C does not change during the emission of light. So we have

$$K_0 - K_1 = L \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}.$$

The kinetic energy of the body with respect to (ξ, η, ζ) diminishes as a result of the emission of light, and the

Разница энергий для массивного тела в 2 системах, в движущейся и покоящейся, $(H-E)$, совпадает с понятием кинетической энергии тела при приобретении телом скорости v .

The kinetic energy of the body with respect to (ξ, η, ζ) diminishes as a result of the emission of light, and the amount of diminution is independent of the properties of the body. Moreover, the difference $K_0 - K_1$, like the kinetic energy of the electron (§ 10), depends on the velocity.

Neglecting magnitudes of fourth and higher orders we may place

$$K_0 - K_1 = \frac{1}{2} \frac{L}{c^2} v^2.$$

From this equation it directly follows that:--

If a body gives off the energy L in the form of radiation, its mass diminishes by L/c^2 . The fact that the energy

Подытожим результат почленного вычитания по двум системам: разница в кинетической энергии массивного тела до излучения и после равна разнице энергии фотонов в двух системах (приращению энергии фотонов): $K_0 - K_1 = L * (1/\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1)$. При стремлении $v \rightarrow 0$ имеем: $\Delta(m * v^2/2) \approx L * (v^2/c^2)/2$. Так как скорость v в $m * v^2/2$ не меняется после излучения (согласно рассмотрению в 1й системе), получаем, что может измениться только масса m . Получаем $\Delta m = L/c^2$, и знаменитую формулу $E = mc^2$. Вывод статьи: масса тела есть мера внутренней энергии. Излучение энергии должно сопровождаться изменением массы. Это, в принципе, можно проверить в эксперименте.

If a body gives off the energy L in the form of radiation, its mass diminishes by L/c^2 . The fact that the energy withdrawn from the body becomes energy of radiation evidently makes no difference, so that we are led to the more general conclusion that

The mass of a body is a measure of its energy-content; if the energy changes by L , the mass changes in the same sense by $L/9 \times 10^{20}$, the energy being measured in ergs, and the mass in grammes.

It is not impossible that with bodies whose energy-content is variable to a high degree (e.g. with radium salts) the theory may be successfully put to the test.

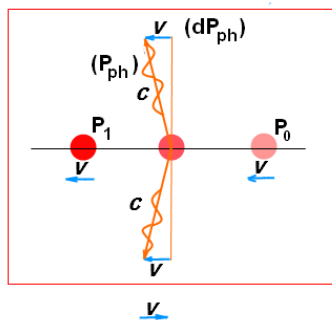
If the theory corresponds to the facts, radiation conveys inertia between the emitting and absorbing bodies.

Вот и вся статья. Давайте обратим внимание на то, что вывод самого соотношения Эйнштейна имеет очень малое отношение к собственно теории относительности. Вспомним, что само соотношение в самом конце статьи выводится при стремлении v к 0, т.е. именно тогда, когда СТО практически совпадает с классической физикой. На самом деле основой вывода данного соотношения служит ситуация, в которой взаимодействуют два вида частиц, массивная частица и пара безмассовых. В фотоне со связью энергии и импульса дело обстоит предельно прозрачно, $p=E/c$. В массивном теле всё сложнее. При неизменной массе у Вас не получится выполнение законов сохранения энергии и импульса при взаимодействии обоих видов частиц. То есть, откуда-то надо взять дополнительную энергию. И это противоречие позволяет доопределить понятие массы, связать ее с другими понятиями. И именно это приводит к известной формуле.

Покажем, как то же соотношение выводится просто, без привлечения теории относительности.

Рассмотрим, ту же ситуацию, что и в статье Эйнштейна, но в рамках классической физики.

Мы можем провести доказательство, как и у Эйнштейна при любых углах линии



излучения фотонов. Но для упрощения ситуации заметим, что для доказательства и вычисления изменения массы мы вправе выбрать любое направление движения 2й системы. Давайте только для упрощения выберем направление v 2й системы поперечным к линии излучения фотонов.

И еще. Мы можем, как и Эйнштейн, рассмотреть баланс по энергии. Но для большей простоты рассмотрим баланс не по энергии, а по импульсу.

Из-за движения 2й системы вправо, векторы направления фотонов (как световых волн) развернутся влево от своих первоначальных направлений на угол v/c ($v \ll c$). Развернется и вектор импульса каждого фотона P_{ph} . Значит, каждый фотон в этой системе получает приращение в импульсе ΔP_{ph} влево, равное $P_{ph} \cdot (v/c)$. Или если через энергию фотона: $(E_{ph}/c) \cdot (v/c) = E_{ph} \cdot v/c^2$. Оба фотона вместе отбирают у массы энергию $E_{2ph} \approx L$ и отбирают импульс влево $\Delta P_{2ph} = E_{2ph} \cdot v/c^2 = L \cdot v/c^2$.

Получается, что масса должна потерять импульс $\Delta P = \Delta(mv) = L \cdot v/c^2$. Но, вспомним, скорость массы здесь не изменяется при излучении фотонов (согласно рассмотрению ситуации в 1й системе, связанной с массой). Поэтому потеря в импульсе у массы может объясниться только потерей массы $\Delta P = \Delta m \cdot v = L \cdot v/c^2$, или $\Delta m = L/c^2$. А если вся масса перейдет в излучение, то энергия E от всей массы (в покое) $E = mc^2$. Мы получили формулу Эйнштейна по его же схеме, вовсе не обращаясь к СТО.

« Формула века

Огромным достижением специальной теории относительности является установление связи между энергией и массой... »

Мифы, мифы... Впрочем, как и фраза «Специальная теория относительности Эйнштейна...», тиражируемая, как в популярной литературе, так, к сожалению, и в научной. СТО – коллективный продукт многих замечательных ученых. Что касается Эйнштейна, он в своих выступлениях связывал формулу $E=mc^2$ с СТО.

Рассуждаем:

Вернемся к ситуации в статье Эйнштейна (массивная частица и 2 излучаемых ею фотона). Посмотрим на проблему под более широким, общим углом зрения, чем вывод из некоего физического противоречия. У фотонов соотношение между энергией и импульсом очень определенное $E=c \cdot p$, характерное для бегущих волн. Для массивной частицы связь E и p не такая ясная и объяснимая.

Как понимаете: 1) решение для массивной частицы по массе, с учетом выполнения сохранения энергии и импульса должно быть единственно; 2) если мы можем «сложить» массивное тело из элементов типа фотона, то это и будет непротиворечивое и единственное искомое решение. Кстати, Эйнштейн не зря использовал в схеме именно пару противоположных фотонов. Их энергия при переходе в другую систему увеличивается на лоренц-фактор $1/\sqrt{(1-v^2/c^2)}$, как и энергия любой массивной частицы в СТО. Т.е. пара противоположных фотонов и в отношении энергии, и в отношении импульса ведет себя как масса. Пара представляет собой наипростейший вариант массивного тела. И согласно классическим представлениям, и согласно СТО. Только исходя из рассмотренного вывода можно было бы прийти к СТО.

Попробуем провести мысленный эксперимент. Представим себе безмассивный ящик, заполненный фотонами. Лучше для рассмотрения представить всю совокупность фотонов в виде множества противоположных пар (имеем право). Мы получаем волновой объект типа «стоячая волна». Разбив объект на пары, мы видим, что система из таких пар обладает E , p и m с их связью, характерной для инерциальной частицы. И никаких противоречий в понимании опыта: в какой-то момент одна пара из всех свободно вылетает из оболочки. При рассмотрении в любой системе нет противоречий.

Вывод: частица должна быть реально составлена из волновой энергии, тем более, что этим реально подтверждается единство природы безмассовых и массивных частиц, единство, проявляемое в планковской частоте для обоих типов частиц ($E=h\nu$).

Либо, масса может быть составлена из элементов «как» фотон ($p=E/c$). Вариант, учитывая единство природы, практически маловероятный.

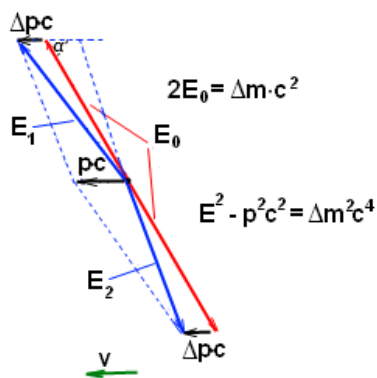
Что собой представляет множество систем Лоренца? Это идеальная совокупность систем в предположении, что все объекты нашего мира составлены из волн. Это либо волновой объект типа «бегущая волна» (TrW-object), либо типа «стоячая волна» (StW-object), то есть, «бегущая волна», но так или иначе замкнутая на себя. В тех системах Лоренца, которые реально покоятся относительно эфира, пространственно-временная структура носит реальный характер. В остальных системах Лоренца структура пространства-времени носит несколько искусственный характер. Но все системы Лоренца, и те, и другие, симметричны и неразличимы для волновых объектов, поскольку во всех них волновые объекты «выглядят» ТОЧНО ТАК ЖЕ, КАК в системах реально покоящихся относительно волновой среды. Это потому, что классический волновой оператор во всех системах Лоренца имеет одинаковый и самый простой вид. Полная идентичность систем касается как скорости распространения волн во всех направлениях, так и всей физики этих волновых объектов. С позиции законов сохранения и здравого смысла для волновых объектов логично было бы выбрать:

скаляр волновой энергии E и вектор потока волновой энергии $\text{Flow}E=E \cdot c$. Но исторически вместо вектора $\text{Flow}E$ стали использовать вектор $p=\text{Flow}E/c^2$.

Экскурс в историю понятия «масса».

Исторически в классической физике масса определялась следующим образом. Во-первых, как мера количества вещества, во-вторых как коэффициент инерции, показывающий сколько усилия надо проявить (то есть $F \cdot t$), чтобы придать телу скорость v : ($F \cdot t = m \cdot v$). Исторически формула Эйнштейна была известна и раньше, но вместо m в ней стояли или т.н. «электромагнитная масса», или количество (масса) увлекаемого эфира и т.п. В формуле Эйнштейна эта масса дана в привычном для нас выражении. Формула получена сугубо формально. Это кажется плюсом. Эйнштейн называет массу **эквивалентом** энергии, **мерой** содержания некоей внутренней энергии. Когда же Эйнштейн приступил к Общей теории относительности, т.е. гравитации, ему понадобилось уже постулировать эквивалентность «инерциальной массы» и «гравитационной массы». Сейчас физики настойчиво ищут некую частицу, которая отвечает за инерциальные свойства всех остальных частиц. Явно, что с т.н. «привычным понятием» массы творится что-то неладное. Наверное, следует просто понимать, что локализованная волновая энергия в форме StW -объектов сама по себе проявляет инерциальные свойства. Как и гравитационные. Гравитация разворачивает траектории (и импульс) фотонов к центру гравитации, и без изменения их энергии. Как и все линейные компоненты StW -объектов. Значит, StW -объекты должны втягиваться гравитационным полем, и тоже без изменения их энергии. Предложенная модель «массы», воспроизводящая все свойства массы, может быть использована и в обосновании квантовой механики с ее волной де Бройля. При движении StW -объекта частоты продольных к движению компонент меняются, создавая т.н. волну де Бройля.

Всё, что мы обсудили, лишней раз подтверждает единство природы обоих типов частиц.



В конце мы покажем, как в классической физике при $v \ll c$ можно вывести известную формулу СТО

$$E^2 - p^2 c^2 = \Delta m^2 c^4 \text{ для пары фотонов (и их совокупностей!).}$$

Исходно мы имеем пару противоположных одинаковых фотонов с общей энергией $2E_0 = \Delta m c^2$ (красный цвет). С углом разлета фотонов α по отношению к вектору v в 1й системе. Результирующего импульса в покое нет. При рассмотрении этой пары в движении, направления изначально противоположных фотонов развернутся влево. Пара приобретает импульс p . $\Delta p = p_0(v/c) = (E_0/c) \cdot (v/c) = E_0 \cdot v/c^2$. $p = \Delta m v$. Общая энергия

увеличивается при движении и становится равной $E_1 + E_2$. Далее используется т.н. «формула косинусов» и формула приближения при $A \gg b$ $\sqrt{A+b} \approx \sqrt{A} + (b/2)/\sqrt{A}$.

$$E_1 = \sqrt{(E_0^2 + (\Delta p c)^2) + 2 \cos(\alpha) E_0 \cdot \Delta p c} \approx \sqrt{(E_0^2 + (\Delta p c)^2)} + \cos(\alpha) E_0 \cdot \Delta p c / \sqrt{(E_0^2 + (\Delta p c)^2)}$$

$$E_2 = \sqrt{(E_0^2 + (\Delta p c)^2) - 2 \cos(\alpha) E_0 \cdot \Delta p c} \approx \sqrt{(E_0^2 + (\Delta p c)^2)} - \cos(\alpha) E_0 \cdot \Delta p c / \sqrt{(E_0^2 + (\Delta p c)^2)}$$

При сложении правые слагаемые уничтожаются, $E = E_1 + E_2 \approx 2 \cdot \sqrt{(E_0^2 + (\Delta p c)^2)}$

$$E^2 = (2E_0)^2 + (2\Delta p c)^2 \quad E^2 = (\Delta m c^2)^2 + (p c)^2$$

Мы получили формулу $E^2 - p^2 c^2 = \Delta m^2 c^4$, особенно очевидную и проявляющую свой смысл при $\alpha = \pi/2$ (в соответствии с формулой Пифагора). Для совокупности пар: все вектора pc параллельны, в каждой паре все величины pc , E_0 и E в одной пропорции.

Надо отдать должное, предложенная Эйнштейном схема с излучением именно пары противоположных фотонов и рассмотрение этого явления в двух системах оригинальна, «с изюминкой».

[На главную](#)